



06. 07. 2020. год.	БРОЈ ИНДЕКСА:	САЛА:
Забрањена је употреба графитне ("обичне") оловке. Сваки тачан одговор доноси 3 поена. Тест траје максимално 45 min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:	НАСТАВНА ГРУПА:
<p>1. Израчунати неодређени интеграл $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x}{t^2+1} dx$ (where $t=e^x, dt=e^x dx$)</p> $= \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg e^x + c$ <p>2. Израчунати одређени интеграл $\int_{-2}^0 x+1 dx$.</p> $= \int_{-2}^{-1} -(x+1) dx + \int_{-1}^0 (x+1) dx$ $= -\left. \frac{(x+1)^2}{2} \right _{-2}^{-1} + \left. \frac{(x+1)^2}{2} \right _{-1}^0 = 1$ <p>3. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:</p> <p>a) $5y'' + 2y' = x$; б) $y' + y^2 = 2x$;</p> <p><input checked="" type="radio"/> в) $\sin x + 2y = y'$; <input checked="" type="radio"/> г) $xy' + 7y = y'$;</p> <p>ђ) ниједна од претходних једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.</p> <p>4. Наћи опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине $y'' - 5y' + 6y = 0$</p> $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ <p>$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$</p> <p>5. За које све вредности реалног параметра a конвергира ред $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n$?</p> $\left \frac{a}{2}\right < 1$ $ a < 2$ $a \in (-2, 2)$	<p>6. У зависности од реалног параметра a одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$.</p> <p>$a \neq \pm 1$ $\text{rang} A = 2$</p> <p>$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$</p> <p>$\det A = 0$ за $a = \pm 1$ $\text{rang} A = 1$</p> <p>7. За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ могуће је одредити:</p> <p>a) карактеристични полином;</p> <p><input checked="" type="radio"/> б) ранг;</p> <p>в) минимални полином;</p> <p>г) сопствене вредности;</p> <p>д) ништа од наведеног.</p> <p>8. Производ сопствених вредности матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ b & 3 & 1 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}$, једнак је:</p> <p>a) b; б) $2b$; <input checked="" type="radio"/> в) 0; г) 6; д) $b-2$;</p> <p>ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.</p> $-\det B = 0$ <p>9. Колико има пермутација скупа $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима број два стоји (не обавезно непосредно) иза броја четири?</p> $\frac{5!}{2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ <p>10. Дата је равна $\alpha: x - y + z = 0$. Написати један вектор нормале те равни, као и координате једне тачке која јој припада.</p> $\vec{n} = (1, -1, 1)$ $A(1, 1, 0)$	

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2

ЈУЛСКИ ИСПИТНИ РОК

06. јул 2020. год.

Име и презиме, број индекса

сала

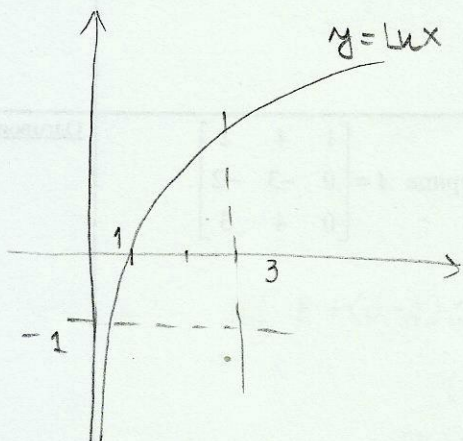
Забрањена је употреба графитне („обичне“) оловке. У сваком задатку коначан одговор уписати у одговарајуће поље. Сваки задатак носи 14 поена. Испит се ради максимално 75 min.

1.	2.	3.	4.	5.	Сума

Оцена

1. [14] Одредити величину површине фигуре која је ограничена кривом $y = \ln x$ и правима $x = 3$ и $y = -1$.

Одговор:



$$\begin{aligned}
 -1 &= \ln x \\
 x &= e^{-1} \\
 \int_{e^{-1}}^3 (\ln x + 1) dx &= \\
 &= (x \ln x - x + x) \Big|_{e^{-1}}^3 \\
 &= 3 \ln 3 + e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \int \ln x dx &= \\
 \int u = \ln x \quad dv = dx \\
 du = \frac{dx}{x} \quad v = x & \\
 x \ln x - \int dx &= \\
 x(\ln x - 1) + C &
 \end{aligned} \right\} =$$

2. [14] Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

Одговор:

$$\begin{aligned}
 y_h &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\
 y_p &= A x e^{2x} \\
 y_p' &= A(1+2x)e^{2x} \\
 y_p'' &= A(4+4x)e^{2x} \\
 A(4+4x)e^{2x} - 5A(1+2x)e^{2x} + 6Ax e^{2x} &= e^{2x} \\
 -A &= 1 \\
 A &= -1 \quad y_p = -x e^{2x} \\
 y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x e^{2x}
 \end{aligned}$$

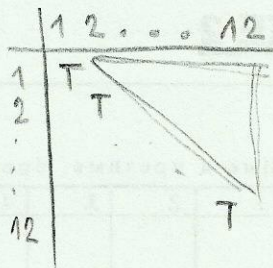
$y = (1+2x)e^{2x}$
 $+ (4+4x)e^{2x}$
 $- 5x e^{2x}$

3. [14] Колико постоји рефлексивних и симетричних бинарних релација у скупу X , ако је $|X| = 12$?

Одговор:

$x \mathcal{R} x$

$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$



$$\frac{12 \cdot 12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$2^{66}$$

4. [14] Одредити карактеристични полином и сопствене вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Одговор:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) [(\lambda+3)(\lambda-3) + 8] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= -(1-\lambda)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

5. [14] Написати једначину равни која садржи тачку $T(1,1,2)$ и паралелна је правама

Одговор:

$$p_1: \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad p_2: x+1 = \frac{y-1}{2} = z+1.$$

$$\vec{n}_1(2, 1, 2) \quad \vec{n}_2(1, 2, 1) \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

$$-3(x-1) + 3(z-2) = 0$$

$$-3x + 3z = 3$$

$$-x + z = 1$$